量子力学の軌跡解釈（ボーム力学）による力学の基本概念２

川口　正倫

１．はじめに

本著は、「量子力学の軌跡解釈（ボーム力学）による力学の基本概念１」（第１編）の続編となり、第１編で用いた公理(【公理 1.1】～【公理 1.3】)・命題(【命題１】～【命題 13】)・補題(【補題１】～【補題３】)・式(式(1.1)～式(1.15))等は本著においても引用する。

第１編では、所有値と観測可能量を定義し、「物理系は個別系として、位置を所有値として有する粒子とそれに随伴する波動ψによって表される。」(【公理 1.1】)、「波動ψの時間的発展がシュレディンガー方程式に従う。」(【公理 1.2】)、「波動ψが、随伴する粒子の運動に与える影響」(【公理 1.3】)を与え、これにより、粒子の運動方程式・エネルギーを導き、さらにこの粒子のアンサンブル(統計集団)における存在確率が標準解釈における存在確率と数学的に同等なものであることを示した。さらに、エネルギー定常状態と運動量定常状態について考察すると、古典的なポテンシャルエネルギーが 0 でありかつエネルギーが 0 では無くても、粒子が静止する状態があり得るなど、標準解釈で何となくイメージしていた描像(粒子の存在を否定しているのだから、標準理論でこのような描像はあり得ないが)と異なる結果が得られた。

本著では、所有値と観測可能量の関係をオブザーバブルを用い公理として与え、所有値がＮＯ-ＧＯ定理の前提なるＦＵＮＣを満たさないことを示す。

２．所有値とオブザーバブル(観測可能量)

古典物理学は、運動量やエネルギーといった物理量を理想的に測定すれば唯一の値が得られ、その値は測定前から物理量が有していたものであるという暗黙の前提の上に成り立っている。従って、観測すれば測定される得る値は一意に定まっており、「物理量が有する値」「観測すれば測定され得る値」「理想的な測定値」を区別する必要も無い。

これに対して、量子力学は「観測すれば測定され得る値」が多数存在していて、その中から１つの値が「理想的な測定値」として確率的に出現するという構成の上に成り立つ。このような一見して、我々の直観に反する論理が与えられているのは、シュレディンガー方程式が実験結果と一致するという事実を説明するために与えらた後付けの解釈だからである。このような多数存在する「観測すれば測定され得る値」は、物理量に応じて決まった演算子の固有値となっており、こういう状況を指して物理量は「観測可能量(オブザーバブル)」であるとも言われる。しかし、「観測すれば測定され得る値」が多数存在し１つの演算子の固有値となっていれば、逆に演算子から「観測すれば測定され得る値」を数学的に導くことが可能なため、通常はこの演算子のことを観測可能量(オブザーバブル)というのが一般的である。しかし、量という言葉の意味からすれば、観測可能量というのは誤解を生じやすいため、以後「オブザーバブル」という言葉を使用する。なお、物理量は実数であり、「観測すれば測定され得る値」も実数であることから、それを固有値とする演算子は、必ずエルミート演算子である。従って、物理量はオブザーバブルであり、それはエルミート演算子であるということになる。

第１編では、所有値(＝「ある物理量を観測していなくとも系が所有していると考えらえる値」)を主に取扱い、対照的な概念として観測可能量(＝「ある物理量を観測すると測定され得る値」) を用い、この観測可能量という術語は、通常用いられる「オブザーバブル」とは異なる意味で使用していたが、ここでは、標準的な「オブザーバブル」とその所有値の関係を与える。

【公理 2. 1】（所有値とオブザーバブルの関係）　系が位置 $\mathbf{x}$ を所有値として有する粒子とそれに随伴する波動Ψによって表されているとき、その系の物理量であるオブザーバブル A（エルミート作用素）について、粒子は所有値としては次にような a を有する。

$$a(\mathbf{x},t)=\mathrm{Re}\left(\frac{\psi(\mathbf{x},t)^{*}A\psi(\mathbf{x},t)}{\psi(\mathbf{x},t)^{*}\psi(\mathbf{x},t)}\right) \tag{2. 1}$$

また、【公理 1. 3】の式(1. 2)を用いると、

$$a(\mathbf{x},t)=\mathrm{Re}\left(\frac{R(\mathbf{x},t)e^{-iS(\mathbf{x},t)/\hbar}AR(\mathbf{x},t)e^{iS(\mathbf{x},t)/\hbar}}{R(\mathbf{x},t)^{2}}\right) \tag{2. 2}$$

となる。なお、Re()は()内の実数を取ることを意味する。

【公理 2. 1】により、あらゆるオブザーバブル A に対して、粒子の所有値の場(時間と位置に依存する)を仮定するものであるが、これを運動量に適用すると次のような結論が得られる。

【命題 14】　波動Ψが随伴する粒子は、運動量として次のような $\mathbf{P}(\mathbf{x},t)$ を有し、その運動量の場に従って運動する。

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},t)=\nabla S(\mathbf{x},t) \tag{2. 3}$$

（証明）

運動量のオブザーバブルは $P=-i\hbar\nabla$ であるから式(2. 2)より、

$$\mathbf{p}(\mathbf{x},t)=\mathrm{Re}\left(\frac{R(\mathbf{x},t)e^{-iS(\mathbf{x},t)/\hbar}\left(-i\hbar\nabla\right)R(\mathbf{x},t)e^{iS(\mathbf{x},t)/\hbar}}{R(\mathbf{x},t)^{2}}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(\frac{R(\mathbf{x},t)e^{-iS(\mathbf{x},t)/\hbar}\left(-i\hbar e^{iS(\mathbf{x},t)/\hbar}\nabla R(\mathbf{x},t)+R(\mathbf{x},t)e^{iS(\mathbf{x},t)/\hbar}\nabla S(\mathbf{x},t)\right)}{R(\mathbf{x},t)^{2}}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(\frac{-i\hbar R(\mathbf{x},t)\nabla R(\mathbf{x},t)+R(\mathbf{x},t)^{2}\nabla S(\mathbf{x},t)}{R(\mathbf{x},t)^{2}}\right)=\nabla S(\mathbf{x},t)$$

（R 及び S は、【公理 1. 3】の式(1. 2)定義により実数であることに注意）

以上のことから、式(2. 3)が成り立つことがわかる。　□

【命題 14】から粒子の質量が m であったとすれば、式(1. 3)に従い粒子が運動することが明らかである。従って、【公理 2. 1】は【公理 1. 3】を包含するより基礎的な仮定ということになる。

次に、エネルギーのオブザーバブルであるハミルトニアン $H=i\hbar\partial/\partial t$ ついて【公理 2. 1】を適用すると、【命題４】の式(1. 4)と同じ結果になることがわかる。

【命題 15】　波動Ψが随伴する粒子は、エネルギーとして次のような$E(\mathbf{x},t)$を有する。

$$E=-\frac{\partial S(\mathbf{x},t)}{\partial t} \tag{2.4}$$

（証明）　エネルギーのオブザーバブルは$H=i\hbar\partial/\partial t$であるから、式(2.2)より

$$E(\mathbf{x},t)=\mathrm{Re}\left(\frac{R(\mathbf{x},t)e^{-iS(\mathbf{x},t)/\hbar}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)R(\mathbf{x},t)e^{iS(\mathbf{x},t)/\hbar}}{R(\mathbf{x},t)^2}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(\frac{R(\mathbf{x},t)e^{-iS(\mathbf{x},t)/\hbar}\left(i\hbar e^{iS(\mathbf{x},t)/\hbar}\frac{\partial R(\mathbf{x},t)}{\partial t}-R(\mathbf{x},t)e^{iS(\mathbf{x},t)/\hbar}\frac{\partial S(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right)}{R(\mathbf{x},t)^2}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(\frac{i\hbar R(\mathbf{x},t)\frac{\partial R(\mathbf{x},t)}{\partial t}-R(\mathbf{x},t)^2\frac{\partial S(\mathbf{x},t)}{\partial t}}{R(\mathbf{x},t)^2}\right)=-\frac{\partial S(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$

□

【補題４】　運動量所有値の自乗$(\mathbf{P}(\mathbf{x},t)^2)$と運動量自乗の所有値$(\mathbf{P}^2(\mathbf{x},t))$の間には次のような関係が成り立つ。

$$\mathbf{p}^2(\mathbf{x},t)=-\frac{\hbar^2}{R}\nabla^2R(\mathbf{x},t)+\left(\nabla S(\mathbf{x},t)\right)^2$$
$$=-\frac{\hbar^2}{R}\nabla^2R(\mathbf{x},t)+\mathbf{p}(\mathbf{x},t)^2$$

(2.5)

（証明）　式(2.2)より、

$$\mathbf{p}^2(\mathbf{x},t)=\mathrm{Re}\left(\frac{R(\mathbf{x},t)e^{-iS(\mathbf{x},t)/\hbar}\left(-i\hbar\nabla\right)^2R(\mathbf{x},t)e^{iS(\mathbf{x},t)/\hbar}}{R(\mathbf{x},t)^2}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(\frac{R(\mathbf{x},t)e^{-iS(\mathbf{x},t)/\hbar}\left(-i\hbar\nabla\right)\left(-i\hbar e^{iS(\mathbf{x},t)/\hbar}\nabla R(\mathbf{x},t)+R(\mathbf{x},t)e^{iS(\mathbf{x},t)/\hbar}\nabla S(\mathbf{x},t)\right)}{R(\mathbf{x},t)^2}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(\frac{R\left(-2i\hbar\nabla S\cdot\nabla R-\hbar^2\nabla^2 R+R(\nabla S)^2\right)}{R^2}\right)$$

$$=-\frac{\hbar^2\nabla^2 R}{R}+(\nabla S)^2=-\frac{\hbar^2\nabla^2 R}{R}+(\mathbf{p})^2$$

□

なお、最後の式は式(2.3)を用いている。同様にして、位置や角運動量の所有値を定義することも可能である。

３．ＦＵＮＣとコッヘン＝シュペッカーのＮＯ－ＧＯ定理

まず、「ベルの定理」と「コッヘン＝シュペッカーのＮＯ－ＧＯ定理」について簡単に説明する。証明過程は省略するが、「ベルの定理」とは次のように３つの条件が両立しないことを証明したものである。

【ベルの定理】　次の３つの条件は両立しない。

(1)　個々の量子系について、すべてのオブザーバブルに同時に確定した値を付与できる。

(2)　そのような個々の量子系に付与された値が、集団としては量子力学の統計的予測を再現する。

(3)　量子系においては局所的な相関しかない。

（証明）省略

量子力学が実験事実と整合することから、(2)は成立するものとみなす。すると、(1)か(3)のいずれかが否定されなければならない。(1)を否定し(3)を肯定するのが標準解釈であり、「個々の量子系について、すべてのオブザーバブルに同時に確定した値を付与できない。」が「量子系においては局所的な相関しかない。」とする立場である。一方で、軌跡解釈は(1)を肯定し、(3)を否定するものであり、「すべてのオブザーバブルに同時に確定した値を付与できる。」が「量子系においては非局所的な相関もありうる。」とする立場である。もっとも、(1)を肯定しすべてのオブザーバブルに同時に確定した値を付与できるとしても、その同時確定した値を同時に観測できること意味するのではなく、所有値(＝「あるオブザーバブルを観測していなくとも系が所有していると考えらえる値」)として粒子が確定した値を有するとすることが可能である。一般的に軌跡解釈はこの論理構成に依拠するものであり、所有値という概念は言わば「隠れた変数」であり、軌跡解釈が「非局所的な隠れた変数の理論」と呼ばれるのはこのためである。

「コッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理」(ＫＳ定理)は、次のような３つの条件が両立しないことを示すものであるが、コッヘンとシュッペッカーはこれにより【ベルの定理】の条件(1)を否定し「すべてのオブザーバブルに同時に確定した値を付与できない。」と結論付けており、できないこと証明したという意味で NO-GO 定理と言われている。しかし、ＫＳ定理は証明の過程で、同時に確定した値を付与されたオブザーバブルが有するＦＵＮＣ(The Functional Composition Principle)という規則を用いており、このＦＵＮＣが軌跡解釈では適用されないことを示し、軌跡解釈がＫＳ定理により否定されないことを示す。

【コッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理】（ＫＳ定理）　次の３つの条件は両立しない。

(1)　個々の量子系について、すべての物理量に同時に確定した値を付与できる。

(2)　もし個々の量子系について、すべての物理量が同時に確定した値を有するなら、その値は測定状況に依存しない。

(3)　個々の量子系について、すべての物理量の取り得る値と射影演算子には１対１の対応関係がある。

なお、この定理の証明には次のような公理を仮定する必要があり。これはエルミート演算子がオブザーバブルであるための条件を仮定するものである。（全てのエルミート演算子がオブザーバブルなのではない。）

【仮定】　エルミート演算子 A が有する実数 a が定義されており、与えられた量子状態に対して、A に対する量子力学の統計的計算により、b＝ P(〔A〕＝a) である実数 b が導かれるなら、実数 a に対するエルミート演算子 A はオブザーバブルである。

（ここで、〔A〕とはエルミート演算子 A が有する実数を表し、P(〔A〕＝a) とは〔A〕＝a である確率を表す。）

この仮定を用いて、ＫＳ定理の証明の過程の概要を次に示す。

（証明１）（ＦＵＮＣの導出）

ある量子系にオブザーバブル A がある。ＫＳ定理の (1) が成立するなら、オブザーバブル A は値 a＝〔A〕を有する。従って、ある関数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して、値 $f([A])$＝b を定義することができる。($f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は、関数 f が実数から実数への関数であることを表す。)

また、【仮定】よりオブザーバブル A は量子力学の統計的計算により確率 c＝ P(〔A〕＝a) を定義することができる。さらに関数 f により、エルミート演算子 B=$f(A)$ を定義することができる。さらに確率の定義より、P(〔A〕＝a)＝P(〔$f(A)$〕＝b) が成り立つ。

従って、エルミート演算子 B=$f(A)$ は、〔B〕＝〔$f(A)$〕＝b という値が定義され、量子力学の統計的計算により c＝ P(〔$f(A)$〕＝b) という実数を導くため、【仮定】より B=$f(A)$ はオブザーバブルである。そして、ＫＳ定理の (2) が成立するなら、オブザーバブル B に定義される値〔B〕は測定状況に依存せずに一意であることが言えるため、次のことが成り立つ。

【ＦＵＮＣ】　A をオブザーバブルとし、$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ をある関数とすると、$f(A)$ は一意に定まるオブザーバブルであり、

〔$f(A)$〕＝f(〔A〕)

が成り立つ。

（証明２）（和の規則の導出）

オブザーバブル A と B が可換であるとき、ある極大エルミート演算子 C が存在し、ある関数 $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ により、

$$A = f(C) \qquad B = g(C)$$

と表すことができる。ここで C はエルミート演算子であるため、スペクトル定理により、

$$C=\int \lambda\, dE(\lambda)$$

と表示することができるため、

$$A=\int f(\lambda)\ dE(\lambda) \qquad B=\int g(\lambda)\ dE(\lambda)$$

$$A+B=\int (\ f(\lambda)+g(\lambda))\, dE(\lambda)$$

となる。ここで、$h(\lambda)=f(\lambda)+g(\lambda)$と定義すると、

$$A+B=\int h(\lambda)\, dE(\lambda)=h(C)$$

であるため、$[A+B]=[h(C)]$となる。

一方で、

$$[A]+[B]=[f(C)]+[g(C)]$$

ここで【ＦＵＮＣ】より、

$$[A]+[B]=[f(C)]+[g(C)]=f([C])+g([C])$$
$$=h([C])=[h(C)]$$

となるため、

$$[A]+[B]=[A+B]$$

が成り立ちたち、次のことが言える。

【和の規則】 オブザーバブルAとBが可換であるとき、$[A+B]=[A]+[B]$が成り立つ。

（証明３）【仮定】より、恒等演算子はオブザーバブルであるといえる。従って、次のような射影演算子の和で与えられる恒等演算子に $I=P_1+P_2+P_3+\cdots P_N$ には【和の規則】を適用でき、

$$[I]=[P_1]+[P_2]+[P_3]+\cdots[P_N]$$

となる。

これを用いて、ＫＳ定理(3)が成り立たないことが証明され、ＫＳ定理は証明されている。

（以下、証明略）

最後まで証明したわけではないが、ＫＳ定理が成立するためには、【仮定】と【ＦＵＮＣ】が前提となっていることがわかる。従って、逆にこのどちらかを満たさない理論についてはＫＳ定理の適用除外となる。

なお、ＫＳ定理が成立することからＫＳ定理(1)を否定的にとらえ「個々の量子系について、すべての物理量に同時に確定した値を付与できない。」とし同時に確定した物理量を否定するのが、コッヘンとシュペッカーが示そうとしたことである。

これにより、軌跡解釈にはＫＳ定理が適用されないことが示される。

【命題 16】　軌跡解釈における運動量の所有値はＦＵＮＣを満たさない。従って、軌跡解釈にはＫＳ定理が適用されない。

（証明）

ＦＵＮＣより、$f(A)=A^2$という関数に対して、

$$[f(A)]=[A^2]=[A]^2$$

が成り立ち、運動量オブザーバブルPが所有値を$\mathbf{P}$有し、ＦＵＮＣを満たすなら、

$$[P^2]=[A]^2=(\mathbf{P})^2$$

が成り立つはずである。

しかし、【命題 14】の式(2.3)から

$$(\mathbf{P})^2=(\nabla S(\mathbf{x},t))^2$$

であり、一方【補題４】式(2.5)より、

$$\left[P^2\right]=\mathbf{p}^2=-\frac{\hbar^2}{R}\nabla^2 R(\mathbf{x},t)+(\mathbf{p})^2$$

となるため、$[P^2]\neq(\mathbf{P})^2$である。

よって、軌跡解釈における運動量の所有値はＦＵＮＣを満たさず、軌跡解釈にＫＳ定理は適用されない。□

以上により、軌跡解釈にＫＳ定理が適用されないことが示され、「個々の量子系について、すべての物理量に同時に確定した値を付与できる。」として成立し得ることがわかる。ただし、【ベルの定理】より「すべてのオブザーバブルに同時に確定した値を付与できる。」が「量子系においては非局所的な相関もありうる。」となることから、非局所的な相関を受け入れざるを得ない。

以　上